③ دقة ونشوءة التجزئة

الخميس 2014/10/29

3 اذا كانت f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ تكون أيضاً ذ.ت.م على أية فترة جزئية منها مثل:

$$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$$

يكون عندئذ:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

وهذا ينتج من التعريف وملاحظة سابقة مباشرة.

- دقة ونشوءة التجزئة:

نقول عن التجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ أنها أدق أو أنعم أو أقوى من التجزئة P_2 لنفس الفترة اذا كانت $P_2\subset P_1$. كما نقول أيضاً أن التجزئة P_2 أخشن أو أضعف من P_1.

مثال: $P_1=\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$

الجديدة P_2 بالاضافة $P_1\subset P_2$.

$-x$ $x_0=a$ x_1 0 $x_n=b$ x

اذا أخذنا الفترة $[0,1]$ ثم كل من $P_1=\{0,\frac{1}{2},1\}$

$$P_2=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$$

تجزئة لهذه الفترة حيث:

$$P_1\subset P_2$$

0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1

لاحظ هنا من خلال المثال السابق أنه إذا $P_1\subset P_2$ فإن $\lambda(P_1)\ge\lambda(P_2)$

إلا أنه العكس ليس صحيحاً.

نعود إلى الدوال محدودة التغير:

ملاحظات:

09620
77459

ت₁) تكون الدالة f د.ت.م على الفترة $]-\infty, \infty[$ فيما اذا كانت هذه الدالة د.ت.م على أية فترة $[A, B]$ ويوجد ثابت موجب M لا يتعلق بالعددين A, B بحيث أن التغير الكلي $\overset{B}{\underset{A}{V}} \leq M$.

وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي:

$$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \sup_{\substack{A<0 \\ B>0}} \left\{ \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \right\} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to \infty}} \overset{B}{\underset{A}{V}}(f) \leq M.$$

ت₂) لدينا دائماً $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq 0$ حتى من أجل فترات غير محدودة. مثلاً اذا كانت $f = C$ ثابت حيث $\forall x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ فإن $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$

وهذا شرط لازم وكافٍ أي

$$f = C \iff \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0.$$

وخطها البياني مستقيم يوازي محور $x'x$.

$f = C$

مثال:

افرض لدينا الدالة $f(x) = 2x + 3$ معرفة على $[0, 2]$ بيّن أن f د.ت.م عليها واحسب تغيرها الكلي أي $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)$. باستخدام التعريف.

الحل:

لنأخذ التجزئات الثلاث التالية:

$$P_1 = \{0, 1, 2\}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

$$P_3 = \left\{0, \frac{1}{10}, 0.5, 1, 1.5, 1.9, 2\right\}.$$

بعد كل عدد عادي يوجد عدد غير عادي . الشالثة 3

عندئذٍ نشكل المجموع:

$$v(f ; P) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\Delta f(x)| = 2(x_n - x_0)$$

حيث الدالة متزايدة تماماً على م.ت تتفاضل الحدود مع بعضها.

$$= 2(2 - 0) = 4.$$

ويجب ان ينتج 4 مهما طلبنا من التجزئات.

في هذا المثال: $\Delta f(x) = | f(x_k) - f(x_{k-1}) | \geq 0$
ومنه

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(2x+3) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} \{ v \} = 4.$$

مثال:
لتكن لدينا الدالة:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in Q = [0,1] \cap Q \\ & x \in [0,1]. \\ -1 ; & x \in \tilde{Q} \text{ (مجموعة الأعداد غير عادية)} = [0,1] - Q. \end{cases}$$

و $R = Q \cup \tilde{Q}$.

هذه الدالة تعرف باسم دالة ديريخليه وهي دالة محدودة وليست مستمرة في أية نقطة (نقاط انقطاع من النوع الثاني). وهي دالة ليست ذ.ت.م على الفترة $[0,1]$ وهكذا على R اذا أخذنا التجزئة:

$$\{ x_0 = 0, y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_n, x_n = 1 \} = P$$

حيث: $x_1, \dots, x_n$ أعداد نسبية.
$y_1, \dots, y_n$ " غير عادية (غير نسبية).

نشكل المجموعة التالية:

$$v(\varphi ; P) = \sum_{k=1}^{n} | \Delta f(x_k) |$$

$$= | \varphi(y_1) - \varphi(x_0) | + | \varphi(x_1) - \varphi(y_1) | + | \varphi(x_n) - \varphi(y_n) |$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ مرة}} = 2n.$$

$\sin n\pi = 0$ $\cos(n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$ (يعدملا cos، sin بالتجزئة يجب اوقابل n).

الثالث 4

لا يمكن حبل هذا المقدار < M وهذا المقدار غير محدود (أي المجموعة) وعندها تكتب:

الدالة ليست ذ.ت.م على $[0,1]$ ⇐ $\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} (2n) = \infty$.

ملاحظة:

هذه الدالة ليست محدودة التغير على أية فترة جزئية مغلقة من R وليست ذ.ت.م على R.

من أجل المثال السابق $P_n[0,1]$

$P_n[0,1] = \{x_0, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$; $n \in N$

خواص الدالة ذ.ت.م على فترة ما:

لتكن الفترة $[a,b]$ من المستقيم الحقيقي محدودة ومغلقة ولنحاول التذكير بخواص هذه الدالة على الفترة $[a,b] \subseteq R$.

(P_1) إذا كانت f دالة ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ تكون محدودة عليها.

إلا أن العكس غير صحيح بشكل عام.

مثال: دالة ديرخليه محدودة وليست ذ.ت.م. من أجل أي تجزئة.

{ لدالة ديرخليه دوماً التجزئة تأخذ أعداد $\in Q$ أو $\notin Q$ }.

الاثبات:

لدينا f ذ.ت.م على $[a,b]$ ولنحاول اثبات $\forall x \in [a,b] |f| \le M$

لتكن $P = \{a, x, b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ و $a < x < b$.

عندئذ يكون:

$V(f; P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

لأن $\sup V = \overset{b}{\underset{a}{V}}$.

$\Rightarrow \forall x ; a < x < b$

يكون: حسب خواص القيمة المطلقة $\le$

$f(x) = |\underbrace{f(x) - f(a)}_{+} + f(a)| \le$

$|f(x) - f(a)| + \underbrace{|f(a)|}_{\text{ثابت}}$

$\overset{b}{\underset{a}{V}} \ge$

$$\leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| = M \Rightarrow |f| \leq M \; ; \; x \in [a,b]$$

حيث الدالة محدودة على $[a,b]$

كما يمكننا تعميم هذه الخاصية على R . $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

P_2 لنقدم المثال التالي على أن العكس غير صحيح بشكل عام على الفترة $[a,b]$

كمثال على الدوال ذ.ت.م وهي ديرخليه المحدودة على أي فترة ولكنها ليست ذ.ت.م على هذه الفترة .

$$\varphi \notin BV_{[a,b]} \quad \Leftarrow |\varphi| \leq 1 \; .$$

P_2) اذا كانت f , g دالتان ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ عندئذ تكون كل من الدوال التالية ذ.ت.م عليها .

أ) $|f|$, f^2 , $\frac{1}{f}$; $(|f| \geq \alpha > 0)$; $\alpha . f$; $\alpha \in R^*$

$f \neq 0$

لكل $x \in [a,b]$.

ب) $\alpha f + \beta g$, $f . g$, $\frac{f}{g}$; $(|g| \geq \alpha > 0)$

حيث $\alpha, \beta \in R^*$, $x \in [a,b]$.

نتيجة:

اذا كانت f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ فإن كل من الدوال: $f.f$

$f^2, f^3, \ldots, f^k(x) \quad (2 \leq k \leq n)$

ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$. وكذلك:

$\frac{1}{f^2}, \frac{1}{f^3}, \ldots, \frac{1}{f^k}$; $\begin{cases} x \in [a,b] \\ 2 \leq k \leq n \end{cases}$

$\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{f^2}$

ليست ∞ .

عدد محدود

$(|f| \geq \alpha > 0)$,

اثبات أن الدالة $\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$:

بما أن f ذ.ت.م عليها و $|f| \geq \alpha > 0$.

أي $-\alpha \geq f \geq \alpha$

أي $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$

الثالثة 6

$$|f| \geq \sigma \Rightarrow \frac{1}{f} \leq \frac{1}{\sigma}$$

لتكن التجزئة :

$$P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

ولنشكل المجموع :

$$v\left(\frac{1}{f}; P\right) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right|$$

بتوحيد المقامات : بالقيمة المطلقة ←

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow |f| \geq \sigma > 0 \Rightarrow \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sum \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq \frac{1}{\sigma^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow$$

$\frac{1}{f}$ ذ.ت.م على $[a,b]$ وتغيرها الكلي :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{\sigma^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

سؤال : (تمرين)

أعد نفس الطلب من أجل : $|f|, f+g, \frac{f}{g}; |g| \geq \sigma > 0$

تمرين : بدل f × مثلاً $f.5$ أو أي عدد $\in R$.

(P_5) إذا كانت $f \in BV[a,b]$ على $[a,b]$ وكان $a < c < b$ فإن هذه الدالة تكون ذ.ت.م على كل من الفترتين $[a,c]$, $[c,b]$

و العكس صحيح وعندها نكتب :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

مثال :

جرب نفصل من أجل الدالة $f(x) = \sin x \; ; x \in [0, \pi]$

$0 < c = \frac{\pi}{2} < \pi$.

(رسم: 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π)

ويمكن تعميم ذلك كنتيجة لهذه الخاصية:
اذا كانت: $a < c_1 < \dots < c_n < b$ تجزئة
للفترة $[a,b]$

$a \quad c_1 \quad c_2 \quad b$

وكانت $f \in BV[a,b]$ فإنها تكون ذ.ت.م على كل من الفترات:
$[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, --- , $[c_n , b]$
كل الفترات مغلقة

وتحقق: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c_1}{\underset{a}{V}}(f) + \dots + \overset{b}{\underset{c_n}{V}}(f)$.

وظيفة:
عمم هذه الخواص على الفترة $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ حيث f, g دوال ذ.ت.م عليها. عندها نحصل على:

1) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f \pm g) \leq \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f)$.

2) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f . g)$ وبالمثل

3) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}\left(\frac{1}{f}\right)$

بالنسبة لـ P_3 يكون لدينا:
$\overset{\infty}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{-\infty}{V}}(f) + \overset{\infty}{\underset{c}{V}}(f)$. ; $-\infty < c < \infty$

ملاحظة (تعميم):
اذا كانت f مطردة ومحدودة على الفترة $]-\infty, \infty[$ عندها تكون الدالة f ذ.ت.م عليها. كمثال الدالة الثابتة مجزئة على R بأكمله هي دالة تزايدية أو تناقصية مكافئة ومحدودة وبالتالي تكون ذ.ت.م.
- الدالة الدرجية غير محدودة. ودالة $\sin$ ذ.ت.م على R بأكمله.
الدالة ~~[illegible]~~ ليست محدودة. ولا يمكن أن تكون ذ.ت.م على أية فترة.
$\tan$ اذا أخذنا: $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ قد تكون

مثال:
الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $]-\infty, \infty[$ ليست ذ.ت.م لأن كل التغيرات ليست محدودة.

دالة تزايدية ⇐ $\Delta f(x_k) \geq 0$

الرابعة: من الملاحظة — الخميس 2015/11/5

مثال:

دالة ديرخليه تلاحظ أن $|c| = 1$ محدودة التغير إلا أن
c ليست ذات ت.م. بالتالي f ذ.ت.م ⇐ $|f|$ ذ.ت.م.
⇏

ملاحظة:
برهنا في المحاضرة السابقة دالة ديرخليه تغيرها الكلي.
$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(|c|) = 0$$

معايير اختبارات الدالة ذ.ت.م:
لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ كما رأينا تعريف الدالة ذات تغير محدود أيضاً
ولنبين من خلال المعايير القادمة تحديد متى تكون الدالة ذ.ت.م على فترة ما.

(1) الدالة المطردة:
كل دالة مطردة تزايدياً أو تناقصياً (الأنواع الأربعة) على $[a,b]$ هي ذ.ت.م
عليه وتكون تغيرها الكلي: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$

الإثبات:
لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ولنفرض أنه تزايدية ولتكن:
$$P[a,b] = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$
تجزئة اختيارية لـ $[a,b]$ عندها يكون:
$$V(f; P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$\overset{\text{تزايدية}}{=} \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$
$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})$$
$$= f(x_n) - f(x_0) = \text{عدد محدود}$$
مما يعني أن الدالة f ذ.ت.م على $[a,b]$ وبالتغير الكلي:
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a) \quad (1)$$
في حال كانت مطردة تناقصياً على $[a,b]$:
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(a) - f(b) \quad (2)$$
$$\geq 0$$